Curvas y Superficies

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

El presente documento pretende ser un material de estudio para los alumnos de la asignatura de “Curvas y Superficies”. Se recomienda la lectura del libro “Curves and Surfaces”, de Sebastián Montiel y Antonio Ros.

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco

Definición 1.1. Una **curva** en el espacio es una aplicación diferenciable[1] $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Normalmente, si queremos señalar explícitamente las componentes de α, escribiremos:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad, a un geómetra solo le interesa la llamada "traza de la curva":

$$\operatorname{tr} \alpha = \operatorname{im} \alpha = \alpha(I)$$

Ejemplo. Sean $a \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

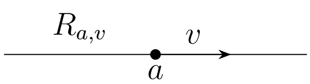
$$\alpha(t) = a + tv$$

En dicho caso:

$$\operatorname{tr} \alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } v = 0 \\ R_{a,v} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

donde denotamos por $R_{a,v}$ a la única recta que pasar por a y con dirección v:

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$



Definición 1.2. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se llama "**plana**" si existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{tr} \alpha \subset P$.

Como P y $P(z = 0)$ son equivalentes salvo un movimiento rígido[2] de $\mathbb{R}^3$, podemos considerar que la curva α está definida como $\alpha : I \to P(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$, cuyas componentes son:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

[1] En esta asignatura cada vez que se mencione "diferenciable" entenderemos que será derivable infinitas veces.

[2] Es decir, una aplicación afín que conserve longitudes y ángulos.

De esta forma, podemos abstraernos y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

En los libros es común llamar a estar curvas "parametrizadas" y "diferenciables". En nuestra definición imponemos que una curva ha de ser diferenciable, y el adjetivo parametrizada se debe a la dependencia de la variable independiente.

Ejemplo. Varios ejemplos de curvas:

1. Extrapolando el ejemplo anterior:

$$\alpha(t) = a + tv$$

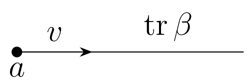
para $a \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha'(t) = v$. Se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ahora, vemos que $\alpha''(t) = 0$, no hay aceleración ninguna.

2. Tomando $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, consideramos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\beta(t) = a + t^2 v$$

Observamos ahora que tenemos $\operatorname{tr}\beta \subset \operatorname{tr}\alpha$, y la traza de esta curva es la semirrecta de extremo a y dirección v:

$$\operatorname{tr}\beta = R_0^+(a, v)$$



Desde el punto de vista físico, muy en el pasado (límite en $-\infty$) estábamos muy alejados del punto a. A medida que nos vamos acercando a tiempo 0 nos vamos acercando al punto a con una velocidad de módulo decreciente que se hace cero cuando alcanzamos el instante $t = 0$ y que luego aumenta posteriormente mientras el móvil se aleja del punto a en la dirección en la que vino.

Vemos que tenemos una velocidad $\beta'(t) = 2tv$, así como una aceleración $\beta''(t) = 2v$, que es constante, por lo que estamos ante un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

El punto a (que se alcanza en $t = 0$) es un punto extraño, es el único punto de $\operatorname{tr}\beta$ en su frontera. Además, podemos observar que en dicho punto tenemos $\beta'(0) = 0$.

Ejercicio 1.1.1. Estudiar $\gamma(t) = a + t^3 v$, con $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Es claro que $\operatorname{tr}\gamma = R_{a,v} = \operatorname{tr}\alpha$. En este caso tenemos:

$$\gamma'(t) = 3t^2 v, \qquad \gamma''(t) = 6tv$$

Vemos que la velocidad es siempre positiva y en este caso la aceleración no es constante: es decreciente cuando $t < 0$ y es creciente cuando $t > 0$, simula la situación en la que un móvil se acerca al punto a frenando cada vez más fuerte y a medida que pasa el punto a comienza a acelerar cada vez más rápido.

Ejemplo. Siguiendo con más ejemplos:

3. Consideramos ahora $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

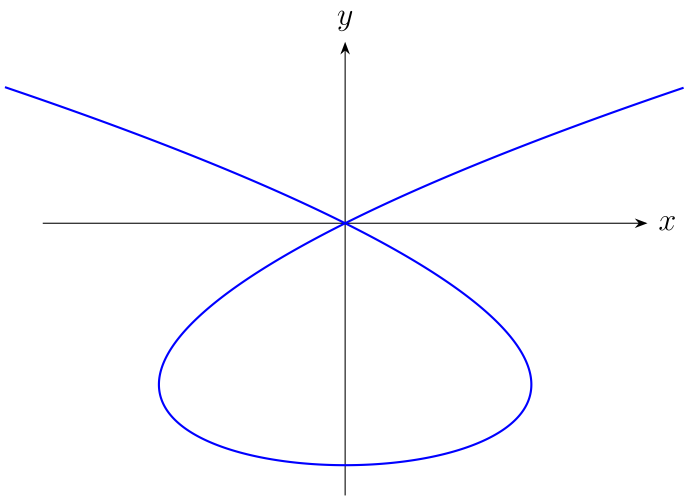
   Para pensar la curva primero analizamos dónde esta corta el eje x:

$$t^2 - 4 = 0 \iff t = \pm 2$$

   En dichas abscisas, la curva toma la ordenada:

$$\delta(-2) = 0 = \delta(2)$$

   Por lo que en ambos instantes de tiempo la curva pasa por el origen. Si estudiamos el corte con el eje y vemos que tiene 3 puntos de corte, dos de ellos ya los conocemos y el que falta es en el instante $t = 0$; donde alcanza una ordenada de -4. Teniendo en cuenta también los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ podemos finalmente deducir que la curva será algo del estilo:



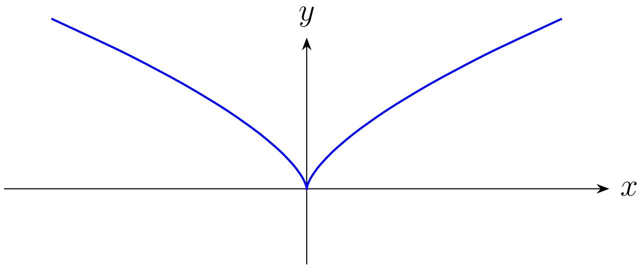
   Vemos que esta curva tiene autointersecciones, por lo que las curvas no tienen por qué ser inyectivas.

4. Si consideramos $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$.

   Su velocidad es $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$, que se anula en el origen. Observamos que en el dibujo de la traza vemos un pico.

   Aunque ε sea diferenciable, $\operatorname{tr}\varepsilon$ tiene "picos". Observamos además que $\operatorname{im}\varepsilon$ es la gráfica de la aplicación[3] $y = x^{2/3}$. Esta función no es derivable en el origen, a pesar de que la curva sí lo sea.

[3]Lo hemos obtenido igualando $x = t^3$, $y = t^2$, despejando t de la primera e igualando en la segunda.



5. Sea $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\zeta(t) = a + r\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right)e_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right)e_2\right)$ donde $a \in \mathbb{R}^3$, e_1, e_2 con $|e_1| = 1 = |e_2|$ con $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ y $r > 0$.

   Observamos que tenemos siempre:

$$\zeta(t) \in P = a + \langle\{e_1, e_2\}\rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Por lo que:

$$\operatorname{im}\zeta = \operatorname{tr}\zeta \subset P$$

   Es decir, ζ es una curva plana. Además, vemos que:

$$|\zeta(t) - a|^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad |\zeta(t) - a| = r \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Como $\operatorname{tr}\zeta$ no se puede salir del plano y equidista una cantidad r de a, tenemos que $\operatorname{tr}\zeta \subset C(a, r) \subset P$.

   A esta curva la llamaremos **la**[4] circunferencia de centro a y radio $r > 0$ en P.

   Observamos que:

$$\zeta'(t) = -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right)e_1 + \cos\left(\frac{t}{r}\right)e_2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   No es constante, por lo que no es un MRU. Además vemos que $\zeta''(t)$ no es constante, por lo que tampoco es un MRUA. Sin embargo, apreciamos que $|\zeta''(t)|$ sí que es constante, así como que $|\zeta'(t)| = 1$.

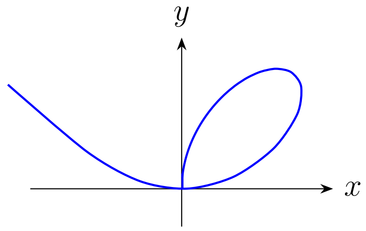
   Se trata de la traza de un Movimiento Circular Uniforme.

6. Sea $\eta : I \to \mathbb{R}^2$ con $I =]-1, +\infty[$ dada por:

$$\eta(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

   Si pensamos en su representación, tras un poco de análisis (límite en más y menos infinito, puntos de corte con los ejes, observar que si $t > 0$ siempre se encuentra en el primer cuadrante, ...) podemos llegar a deducir que su forma ha de ser similar a algo como:

[4] A esta la parametrizaremos siempre de la misma forma, aunque distintas parametrizaciones den la misma traza.



Vemos que $\eta(0) = (0,0)$ y que $\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = (0,0)$, pero a pesar de ello la curva no se autointerseca, ya que podemos probar que es inyectiva:

Sean $u, t \in \mathbb{R}$ con $u, t > -1$ tales que $\eta(t) = \eta(u)$ tenemos entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3t}{1+t^3} = \dfrac{3u}{1+u^3} \\[2ex] \dfrac{3t^2}{1+t^3} = \dfrac{3u^2}{1+u^3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{3u^2}{1+u^3} = t \cdot \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3ut}{1+u^3}$$

Si $u \neq 0$ podemos dividir entre u y concluir que $u = t$ y si $u = 0$ ha de ser $t = 0 = u$ para obtener $\eta(t) = \eta(u)$. Hemos probado que η es inyectiva.

Vemos otro hecho que hemos de tener en cuenta, y es que en este ejemplo I no es homeomorfo a $\operatorname{tr}\eta$, puesto que si hubiera un homeomorfismo, podemos tomar cualquier entorno de $\eta(0)$ este ha de contener una bola abierta de centro $\eta(0)$ y radio $r > 0$ lo suficientemente pequeña para que su intersección con $\operatorname{tr}\eta$ menos $\eta(0)$ tenga 3 componentes conexas y la correspondiente imagen de este conjunto mediante el homeomorfismo tendría 2, lo que llevaría a una contradicción.

Si a esta curva le añadimos otra para que sea simétrica respecto al eje $y = x$ obtenemos el *folium de Descartes*.

Definición 1.3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, definimos la **recta tangente** a la curva α en el instante $t \in I$ como la recta afín $\alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle$, que denotaremos por $R_{\alpha(t),\alpha'(t)} \equiv R_t$.

Observemos que si $\alpha'(t) = 0$ para cierto $t \in I$ $\alpha(t) + \langle 0 \rangle$ no es una recta, es decir, en los puntos donde $\alpha'(t) = 0$ no hay[5] recta tangente.

Los puntos $\alpha(t)$ de $\operatorname{tr}\alpha$ tales que $\alpha'(t) \neq 0$ se llaman **regulares**. En otro caso, los llamaremos **singulares**. La curva α se dice **regular** si $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Ejercicio 1.1.2. Determinar las curvas regulares que han aparecido en los ejemplos anteriores.

- $\alpha(t) = a + tv$, teníamos $\alpha'(t) = v$, por lo que α es regular si y solo si $v \neq 0$.
- $\beta(t) = a + t^2v$, tenemos $\beta'(t) = 2tv$, por lo que la curva no es regular, ya que el punto $\beta(0)$ es singular.

[5] No diremos que la recta tangente es un punto.

- $\gamma(t) = a + t^3 v$, tenemos $\gamma'(t) = 3t^2 v$, por lo que la curva no es regular, puesto que $\gamma(0)$ es un punto singular.

- $\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, tenemos $\delta'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (la segunda componente solo se anula si $t = 0$ y a la primera no le sucede esto), por lo que es una curva regular.

- $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$, $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$ no es regular, el punto $\varepsilon(0)$ es singular.

- $\zeta(t) = a + r(\cos(t/r)e_1 + \operatorname{sen}(t/r)e_2)$, teníamos que $|\zeta'(t)| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que se trata de una curva regular.

- $\eta :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, dada por:

$$\eta(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

  Tenemos que:

$$\eta'(t) = \left(\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \right)$$

  Veamos si se anula la derivada en algún punto:

$$\begin{cases} 3 - 6t^3 = 0 & \Longleftrightarrow & t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ 6t - 3t^3 = 0 & \Longleftrightarrow & t = 0 \text{ ó } t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

  Como ambos sucesos son incompatibles tenemos que $\eta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]-1, +\infty[$.

Ejemplo. Más ejemplos de curvas:

1. La gráfica de una función real de variable real derivable es la traza de una curva (parametrizada diferenciable).

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, tenemos:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}$$

   Definimos $\alpha_f : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha_f(t) = (t, f(t))$.

   Sin embargo, no toda curva es la gráfica de una función real de variable real, como por ejemplo la circunferencia.

2. Como primer ejemplo de una curva no plana, $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\theta(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

   para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = 0$.

   Ahora, si $ab \neq 0$ veamos que la curva no es plana:

Por reducción al absurdo, si fuera plana tendríamos que existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ de forma que $\operatorname{tr}\theta \subset P$. Podemos tomar los puntos de la curva:

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta(0) = (a,0,0) \\ p_2 &= \theta\left(2\pi\sqrt{a^2+b^2}\right) = (a,0,2b\pi) \\ p_3 &= \theta\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right) = \left(0,a,\frac{\pi b}{2}\right) \\ p_4 &= \theta\left(\pi\sqrt{a^2+b^2}\right) = (-a,0,b\pi) \end{aligned}$$

Y como $\operatorname{tr}\theta \subset P$ tenemos por tanto que $p_1,p_2,p_3,p_4 \in P$. Si consideramos los vectores:

$$\begin{aligned} v_1 &= p_2 - p_1 = (0,0,2b\pi) \\ v_2 &= p_3 - p_1 = \left(-a,a,\frac{\pi b}{2}\right) \\ v_3 &= p_4 - p_1 = (-2a,0,b\pi) \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -2a \\ 0 & a & 0 \\ 2b\pi & \pi b/2 & b\pi \end{vmatrix} = 4a^2b\pi \neq 0$$

Por lo que v_1,v_2,v_3 son tres vectores contenidos en un plano que son linealmente independientes, contradicción, que viene de suponer que θ es una curva plana.

Además, veamos que es una curva regular, puesto que:

Definición 1.4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $a,b \in \mathbb{R}$ con $[a,b] \subset I$, definimos la **longitud** de α entre[6] a y b correspondiente a la partición

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

como:

$$L_a^b(\alpha,P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

Observemos que si aplicamos la desigualdad triangular un número finito de veces obtenemos que:

$$L_a^b(\alpha,P) \geqslant |\alpha(t_n) - \alpha(t_0)| = |\alpha(b) - \alpha(a)|$$

Y observemos que esta desigualdad no depende de la partición P escogida.
Además, la igualdad se dará si en todas las desigualdades triangulares se daba la igualdad, es decir, si toda la partición se podía contener en un segmento. Así, el camino más corto entre dos puntos parece ser un segmento. Vemos que esta cota inferior es una mala aproximación del valor que estamos buscando, que es la longitud de la curva α entre a y b.

[6] Algunos libros mencionan en su lugar "entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$".

Ahora, podemos ver que:

$$\begin{aligned} L_a^b(\alpha, P) &= |\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| + \ldots + |\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t_1} \alpha'(t)\ dt \right| + \ldots + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha'(t)\ dt \right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)|\ dt + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\alpha'(t)|\ dt \\ &= \int_{t_0}^{t_n} |\alpha'(t)|\ dt = \int_a^b |\alpha'(t)|\ dt \end{aligned}$$

Y esta cantidad tampoco depende de la partición P escogida. Así:

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leqslant L_a^b(\alpha, P) \leqslant \int_a^b |\alpha'(t)|\ dt \qquad \forall P \text{ partición de } [a, b]$$

Y la última desigualdad tiene una gran interpretación física, pues si recordamos la fórmula $e = vt$ de la física, vemos que $|\alpha'(t)|$ es la velocidad y la multiplicamos por una diferencia de tiempo pequeña dt, obteniendo así la "suma" (integral) de las diferencias de espacio. Notaremos:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\ dt$$

Supuesto ahora que $a \neq b$, definimos $f : [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$f(\beta, \gamma, \eta) = +\sqrt{x'(\beta)^2 + y'(\gamma)^2 + z'(\eta)^2} \qquad \forall \beta, \gamma, \eta \in [a, b]$$

para x, y, z las componentes de α: $\alpha = (x, y, z)$. La aplicación f es continua sobre el compacto $[a, b]^3$, por lo que es uniformemente continua, es decir, dado $\varepsilon > 0$ si $t_1, t_2, t_3, t_1', t_2', t_3' \in [a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t_1 - t_1'|, |t_2 - t_2'|, |t_3 - t_3'| < \delta$ se tiene que:

$$|f(t_1, t_2, t_3) - f(t_1', t_2', t_3')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Sea P una partición de $[a, b]$ con $|P| < \delta$ (es decir, que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$), vemos que:

$$\left| L_a^b(P) - \int_a^b |\alpha'(t)|\ dt \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)|\ dt \right) \right|$$